№3-дәріс

Векторлар, Векторларға сызықты амалдар қолдану. Векторлардың скалярлық көбейту қасиеттері

Анықтама 1. Қандай да бір $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ n санның реттелген жиынтығы n-өлшемді вектор деп аталады, егер $x_i, i=\overline{1,n}$ - компоненттері (вектордың координаталары).

Екі n-өлшемді векторлар тең болады, егер олардың сәйкес компоненттері тең болса. $O(0,0,...,0)$ векторы нөлдік вектор деп аталады.

Векторларға қолданылатын амалдар:

1. Векторларды қосу $x=(x_1,x_2,...,x_n)\,,y=(y_1,y_2,...,y_n)$:

$$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,...,x_n+y_n).$$

2. Векторды λ санына көбейту :

$$\lambda x=(\lambda x_1,\lambda x_2,...,\lambda x_n)$$

Анықтама 2. $\{x_1,x_2,..,x_n\}$ векторлар жүйесі сызықты тәуелді деп аталады, егер $\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+...+\lambda_n x_n=0$ теңдігін қанағаттандыратын біруақытта нөлге тең емес $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ сандары табылса, кері жағдайда жүйе сызықты тәуелсіз деп аталады.

Мысал 1. $a=(2;0;1),b=(1;-2;0),c=(4;-4;1)$ векторлары сызықты тәуелді, себебі $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-1$

$$\lambda_1 a+\lambda_2 b+\lambda_3 c=a+2b-c=0\Rightarrow c=a+2b$$

a және b векторлары сызықты тәуелсіз, себебі

$$\lambda_1 a+\lambda_2 b=(2\lambda_1+\lambda_2;-2\lambda_2;\lambda_1)=0\Rightarrow\lambda_1=0,\lambda_2=0.$$

Векторлар жүйесі сызықты тәуелді болса, онда жүйенің тым болмағанда бір векторын қалғандарының сызықтық комбинациясы түрінде өрнектеуге болады.

Q кез келген векторлар жүйесі болсын.

Анықтама 3. $E=(e_1,e_2,...,e_s)\subset Q$ сызықты тәуелсіз векторлар жүйесі Q –дегі базис деп аталады , егер

$$x=\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+...+\lambda_s x_s \qquad (1)$$

теңдігін қанағаттандыратын бір уақытта нөлге тең емес $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_s$ сандары табылса.

(1) формула x векторының E базисі бойынша жіктелуі деп аталады, ал $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_s$ x векторының E базисіндегі координаталары деп аталады. 1 мысалда a және b векторлары $\{a,b,c\}$ векторлар жүйесінің базисін құрайды.

Теорема 1. $m>n$ өлшемді кез келген жүйе n–өлшемді векторлар жүйесінде сызықты тәуелді.

Анықтама 4. Векторлар жүйесінің рангі деп осы жүйенің базисіндегі векторлар санын айтамыз және ол осы жүйедегі сызықты тәуелсіз векторлардың ең үлкен санын айтамыз.

Теорема 2. Векторлар жүйесінің рангі жолдары осы жүйенің векторының компоненттерінен құралған матрицаның рангіне тең.

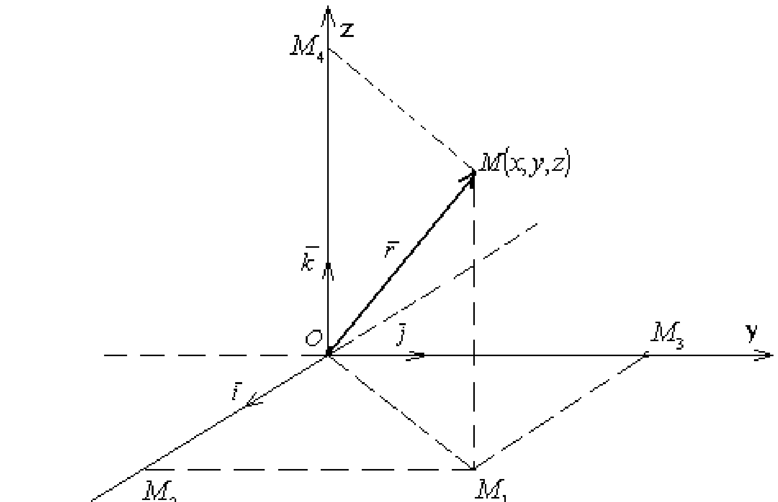
Анықтама 5. Векторларды қосу және санға көбейту амалдары орындалатын n-өлшемді векторлар жиынын R_n сызықтық кеңістігі деп атайды.

R_n кеңістігінің рангі n-ге тең, яғни, R_n кеңістігіндегі кез келген n сызықтық тәуелсіз векторлар базис құрайды және n - кеңістіктің өлшемі деп аталады.

Тікбұрышты декарттық координаталар жүйесі

O нүктесі арқылы өтетін өзара перпендикуляр үш түзудің бойынан R_3 кеңістігінде базис құрайтын сәйкесінше $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ бірлік векторларын таңдап аламыз. OX, OY, OZ түзулерін координат осьтері деп, ал O нүктесін – координаттың бас нүктесі деп атаймыз.

M кеңістіктегі кез келген нүкте болсын, ал M_2, M_3, M_4 нүктелері - M нүктесінің координат осьтеріне түсірілген проекциялары.

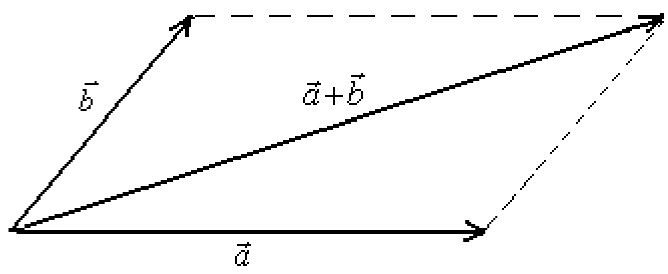


Онда $np_{ox}\overline{OM} = OM_2 = x$ - абсцисса

$np_{oy}\overline{OM} = OM_3 = y$ - ордината

$np_{oz}\overline{OM} = OM_4 = z$ - аппликата

$\bar{r} = \overline{OM} = \overline{OM_2} + \overline{OM_3} + \overline{OM_4} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ - $\{\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k}\}$ базисінде жіктелуі, ал x, y, z - $\bar{r}$ векторының координаталары [M нүктесінің



координаталары] және былай белгіленеді: $\bar{r}(x, y, z)$ [$M(x, y, z)$].

$\bar{a}(a_x, a_y, a_z)$ және $\bar{b}(b_x, b_y, b_z)$ векторлары берілсін. Онда

$$\bar{a} \pm \bar{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$$

$\alpha\bar{a} = (\alpha a_x, \alpha a_y, \alpha a_z)$, мұндағы α - тұрақты сан.

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ .$$

Анықтама 6. $\bar{a}$ векторының бағыттаушы косинустары деп $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ сандарын айтамыз, мұндағы α, β, γ - $\bar{a}$ векторының сәйкесінше OX, OY, OZ координат осьтерімен жасайтын бұрыштары.

Бағыттаушы косинустар

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|}.$$

Бұдан

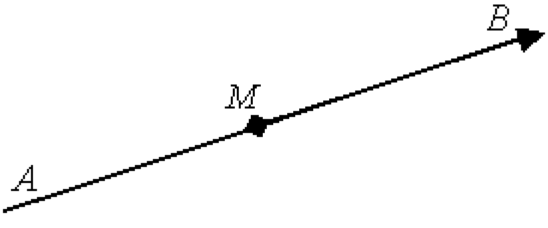
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Е с к е р т у. Үш координата (R_2-де екі координата) векторды бірмәнді анықтайтындықтан, көптеген геометриялық есептерді аналитикалық түрде шығаруға болады (координаталардың жиынтығы арқылы).

Мысал 1. Кесіндіні берілген қатынаста бөлу. AB кесіндісін және M нүктесін қарастырамыз, онда

$$\frac{|\overline{AM}|}{|\overline{MB}|} = \lambda\ . \qquad (2)$$

M нүктесінің координаталарын табалық



$A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $M(x, y, z)$ болсын. Онда

$\overline{AM} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$, $\overline{MB} = (x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z)$. $\overline{AM} \,||\, \overline{MB}$, онда $\overline{AM} = \lambda \cdot \overline{MB}$. Немесе

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x) \Rightarrow (1 + \lambda)x = x_1 + \lambda x_2 \Rightarrow$$

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_1}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_1}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_1}{1 + \lambda}.$$

Векторларды скаляр көбейту

Анықтама 7. $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларының скаляр көбейтіндісі $\bar{a}\cdot\bar{b}$ деп, мынадай формула бойынша есептелетін шаманы айтамыз:

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = ab\cos\alpha, \quad \alpha = \left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right). \tag{3}$$

$b\cos\alpha = np_{\bar{a}}\bar{b}$ болғандықтан, онда $\bar{a}\bar{b} = a\, np_{\bar{a}}\bar{b}$

Скаляр көбейтудің қасиеттері:

1. Егер $\bar{a}\perp\bar{b}$, онда $\bar{a}\bar{b} = 0$.
2. $\bar{a}\cdot\bar{a} = a^2$
3. $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\cdot\bar{a}$
4. $\bar{a}\left(\bar{b}+\bar{c}\right) = \bar{a}\bar{b} + \bar{b}\bar{c}$
5. $m\left(\bar{a}\bar{b}\right) = \left(m\bar{a}\right)\cdot\bar{b} = \bar{a}\cdot\left(m\bar{b}\right)$.

Скаляр көбейтудің координаталық формадағы өрнектелуін табалық. $\bar{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right), \bar{b} = \left(b_x, b_y, b_z\right)$ болсын. Онда

$$\bar{i}\cdot\bar{i} = \bar{j}\cdot\bar{j} = \bar{k}\cdot\bar{k} = 1, \quad \bar{i}\cdot\bar{j} = \bar{i}\cdot\bar{k} = \bar{j}\cdot\bar{k} = 0$$

екенін ескерсек, $\bar{a}\cdot\bar{b} = \left(a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}\right)\cdot\left(b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}\right)$. Немесе

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{4}$$

Қ о р ы т ы н д ы. Векторларды скаляр көбейтудің көмегімен мыналар анықталады:

1. Екі вектордың перпендикулярлығы

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0 \tag{5}$$

2. Векторлар арасындағы бұрыштың косинусы

$$\cos\alpha = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \tag{6}$$

3. Бір вектордың екінші векторға түсірілген проекциясы

$$np_{\bar{a}}\bar{b} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|} \tag{7}$$